

Wie man Beweise liest: die Strategie der ‚Selbst-Erklärung‘

Es hat sich gezeigt, dass die Strategie der ‚Selbst-Erklärung‘ in vielen verschiedenen Fachrichtungen das Problemlösen und Verständnis von Lernenden verbessert. Sie kann auch Ihnen helfen, mathematische Beweise besser zu verstehen: in einer Studie in Großbritannien haben Studierende die englische Version dieser Materialien durchgearbeitet und danach einen Beweis gelesen. In einem anschließenden Verständnistest über den Beweis hat diese Gruppe von Studierenden ein 30% besseres Ergebnis erzielt als die Kontrollgruppe.

Wie Selbst-Erklärung funktioniert

Um Ihr Verständnis eines Beweises zu verbessern, sollten Sie eine Reihe von Techniken anwenden.

Nach dem Lesen jeder Zeile:

- Versuchen Sie, die Hauptideen des Beweises zu identifizieren und auszuarbeiten.
- Versuchen Sie jede Zeile mit vorherigen Ideen zu erklären. Dies könnten Ideen aus den Informationen des Beweises sein, oder Beispiele von vorherigen Theoremen und Beweisen, oder Ideen aus Ihrem eigenen Vorwissen des Themengebiets.
- Denken Sie über die Fragen nach, die entstehen, wenn neue Informationen Ihrem derzeitigen Verständnis widersprechen.

Bevor Sie mit der nächsten Zeile des Beweises fortfahren, sollten Sie sich folgendes fragen:

- Verstehe ich die Ideen, die in dieser Zeile benutzt werden?
- Verstehe ich, warum diese Ideen benutzt werden?
- Wie sind diese Ideen verbunden mit anderen Ideen im Beweis, anderen Theoremen, oder meinem Vorwissen?
- Hat die Selbst-Erklärung, die ich mir überlegt habe, mir geholfen, meine Fragen zu beantworten?

Auf der nächsten Seite finden Sie ein Beispiel von möglichen Selbst-Erklärungen, die von Studierenden erzeugt wurden, während sie einen Beweis zu verstehen versuchten. (Die Kennzeichnungen „(Z1)“ usw. stehen für Zeilennummern.) Bitte lesen Sie das Beispiel aufmerksam durch, damit Sie verstehen, wie Sie diese Strategie in ihrem eigenen Lernen anwenden können.

Beispiel einer Selbst-Erklärung

Theorem

Keine ungerade ganze Zahl kann als Summe von drei geraden ganzen Zahlen ausgedrückt werden.

Beweis

- (Z1) Angenommen, es gilt das Gegenteil: es gibt eine ungerade ganze Zahl x mit $x = a + b + c$, wobei a , b und c gerade ganze Zahlen sind.
- (Z2) Dann gibt es ganze Zahlen k , l und m , sodass $a = 2k$, $b = 2l$ und $c = 2m$.
- (Z3) Also ist $x = a + b + c = 2k + 2l + 2m = 2(k + l + m)$.
- (Z4) Daraus folgt, dass x gerade ist. Widerspruch.
- (Z5) Daher kann keine ungerade ganze Zahl als Summe von drei geraden ganzen Zahlen ausgedrückt werden. □

Nach dem Lesen dieses Beweises hat ein:e Leser:in folgende Selbst-Erklärungen erstellt:

- „Dieser Beweis benutzt die Methode ‚Beweis durch Widerspruch‘.“
- „Da a , b und c gerade Zahlen sind, müssen wir die Definition von geraden Zahlen benutzen, was in Z2 passiert.“
- „Der Beweis setzt dann diese Ausdrücke für a , b und c in die Gleichung für x ein.“
- „Die Formel für x wird dann vereinfacht, und es wird gezeigt, dass sie auch die Definition einer geraden Zahl erfüllt: Widerspruch.“
- „Also kann keine ungerade ganze Zahl als Summe von drei geraden ganzen Zahlen ausgedrückt werden.“

Selbst-Erklärung im Vergleich zu anderen Kommentaren

Sie sollten sich darüber klar sein, dass die Selbst-Erklärungsstrategie nicht das selbe ist wie *Selbstüberwachung* (monitoring) oder *Umformulierung*. Diese beiden Techniken werden Ihnen nicht so viel helfen wie Selbst-Erklärung.

Umformulierung

„ a , b und c müssen positive oder negative ganze Zahlen sein.“

In dieser Aussage ist keine Selbst-Erklärung vorhanden. Es sind keine zusätzlichen Informationen hinzugefügt oder mit der Aussage verbunden worden. Der/die Leser:in benutzt nur andere Wörter, um die Information zu umschreiben, die im Text durch die Wörter „gerade ganze Zahlen“ repräsentiert ist. Sie sollten solche Umformulierungen vermeiden, während Sie selbst einen Beweis verstehen wollen. Umformulierung wird Ihnen dabei nicht so viel helfen wie Selbst-Erklärung.

Selbstüberwachung

„Ok, ich verstehe, dass $2(k + l + m)$ eine gerade ganze Zahl ist.“

Diese Aussage zeigt nur die Gedanken des/der Lesenden. Es ist nicht das selbe wie Selbst-Erklärung, weil der/die Studierende den Satz oder Ausdruck nicht mit anderen Ideen im Text oder aus dem eigenen Vorwissen verbindet. Fokussieren Sie sich bitte auf Selbst-Erklärung statt auf Selbstüberwachung.

Eine mögliche Selbst-Erklärung des selben Satzes wäre:

„OK, $2(k + l + m)$ ist eine gerade ganze Zahl, weil die Summe von drei ganzen Zahlen wieder eine ganze Zahl ist, und 2 mal eine ganze Zahl ist eine gerade (ganze) Zahl.“

In diesem Beispiel identifiziert der/die Lesende die Hauptideen im Text und arbeitet sie aus. Er/sie benutzt Informationen, die bereits gegeben sind, um die Logik des Beweises zu verstehen.

Dies ist der Ansatz, den Sie nach jeder Zeile des Beweises implementieren sollten, um Ihr Verständnis des Stoffes zu verbessern.

Übungsbeweis 1

Bitte lesen Sie nun diesen kurzen Beweis und erklären Sie sich selbst jede Zeile, entweder im Kopf oder mit Notizen auf Papier, unter Verwendung der Ratschläge auf den vorherigen Seiten.

Theorem

Es gibt keine kleinste positive reelle Zahl.

Beweis

Wir nehmen das Gegenteil an: dass es eine kleinste positive reelle Zahl gibt.

Es gibt also, nach dieser Annahme, eine reelle Zahl r , sodass für jede positive reelle Zahl s gilt: $0 < r \leq s$.

Betrachte $m = \frac{r}{2}$.

Dann ist $0 < m < r$.

Dies ist ein Widerspruch, da m eine reelle positive Zahl kleiner als r ist.

Also gibt es keine kleinste positive reelle Zahl.

□

Übungsbeweis 2

Hier ist ein etwas komplizierterer Beweis als Übung. Erinnern Sie sich: benutzen Sie Selbst-Erklärung nach jeder Zeile des Beweises, die Sie lesen, entweder im Kopf oder auf Papier.

Definition

Eine *abundante* (vom lateinischen *abundans* „überladen“) Zahl ist eine positive ganze Zahl n mit der Eigenschaft, dass die Summe aller Teiler von n größer als $2n$ ist.

Zum Beispiel 12 ist abundant, weil $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 > 24$.

Theorem

Das Produkt von zwei verschiedenen Primzahlen ist nicht abundant.

Proof

Sei $n = p_1 p_2$, mit p_1 und p_2 verschiedene Primzahlen.

Wir können annehmen, dass $2 \leq p_1$ and $3 \leq p_2$.

Die Teiler von n sind 1, p_1 , p_2 und $p_1 p_2$.

Bemerke, dass $\frac{p_1 + 1}{p_1 - 1}$ eine abnehmende Funktion von p_1 ist.

Also ist $\max \left\{ \frac{p_1 + 1}{p_1 - 1} \mid p_1 \in \mathbb{N} \right\} = \frac{2 + 1}{2 - 1} = 3$.

Daher ist $\frac{p_1 + 1}{p_1 - 1} \leq p_2$.

Also ist $p_1 + 1 \leq p_1 p_2 - p_2$.

Daraus folgt $p_1 + 1 + p_2 \leq p_1 p_2$.

Daher ist $1 + p_1 + p_2 + p_1 p_2 \leq 2p_1 p_2$. □

Denken Sie daran. . .

Die Anwendung der Selbst-Erklärungsstrategie verbessert nachweislich das Verständnis von mathematischen Beweisen in Studierenden. Versuchen Sie die Strategie jedesmal zu benutzen, wenn Sie einen Beweis lesen, ob in der Vorlesung, Ihren Notizen oder einem Buch.