Abstraktion in der Mathematik

Julia Goedecke

Queens' College
Universität Cambridge

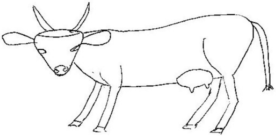
2. Februar 2012, GPW

Ablauf

Ablauf

Abstraktion in der Sprache

Abstraktion in der Sprache



Abstraktion in der Sprache

Kühe
Pferde
Würmer
Menschen
Rosen
Farne
Bäume
Pilze

Abstraktion in der Sprache

$$\left.\begin{array}{l}\text{Kühe}\\ \text{Pferde}\\ \text{Würmer}\end{array}\right\}\ \text{Tiere}$$

Menschen
Rosen
Farne
Bäume
Pilze

Abstraktion in der Sprache

$$\left.\begin{array}{l}\text{Kühe}\\\text{Pferde}\\\text{Würmer}\end{array}\right\}\text{Tiere}$$

Menschen

$$\left.\begin{array}{l}\text{Rosen}\\\text{Farne}\\\text{Bäume}\end{array}\right\}\text{Pflanzen}$$

Pilze

Abstraktion in der Sprache

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Kühe}\\ \text{Pferde}\\ \text{Würmer}\end{array}\right\}\text{Tiere}\\ \text{Menschen}\\ \left.\begin{array}{l}\text{Rosen}\\ \text{Farne}\\ \text{Bäume}\end{array}\right\}\text{Pflanzen}\\ \text{Pilze}\end{array}\right\}\text{Lebewesen}$$

Ablauf

Zahlen

Der wohl wichtigste Abstraktionsschritt in der Geschichte der Mathematik:

- "3 Äpfel" $\longrightarrow$ "3"

Danach gibt es auch (nicht unbedingt in dieser Reihenfolge)

- negative Zahlen (Abstraktion von Schulden?)
- rationale Zahlen (Abstraktion von Verhältnissen)
- reelle Zahlen (Abstraktion von Längen)
- komplexe Zahlen

Zahlen

Der wohl wichtigste Abstraktionsschritt in der Geschichte der Mathematik:

- "3 Äpfel" $\longrightarrow$ "3"

Danach gibt es auch (nicht unbedingt in dieser Reihenfolge)

- negative Zahlen (Abstraktion von Schulden?)
- rationale Zahlen (Abstraktion von Verhältnissen)
- reelle Zahlen (Abstraktion von Längen)
- komplexe Zahlen

Zahlen

Der wohl wichtigste Abstraktionsschritt in der Geschichte der Mathematik:

- "3 Äpfel" $\longrightarrow$ "3"

Danach gibt es auch (nicht unbedingt in dieser Reihenfolge)

- negative Zahlen (Abstraktion von Schulden?)
- rationale Zahlen (Abstraktion von Verhältnissen)
- reelle Zahlen (Abstraktion von Längen)
- komplexe Zahlen

Zahlen

Der wohl wichtigste Abstraktionsschritt in der Geschichte der Mathematik:

- “3 Äpfel” $\longrightarrow$ “3”

Danach gibt es auch (nicht unbedingt in dieser Reihenfolge)

- negative Zahlen (Abstraktion von Schulden?)
- rationale Zahlen (Abstraktion von Verhältnissen)
- reelle Zahlen (Abstraktion von Längen)
- komplexe Zahlen

Zahlen

Der wohl wichtigste Abstraktionsschritt in der Geschichte der Mathematik:

- "3 Äpfel" $\longrightarrow$ "3"

Danach gibt es auch (nicht unbedingt in dieser Reihenfolge)

- negative Zahlen (Abstraktion von Schulden?)
- rationale Zahlen (Abstraktion von Verhältnissen)
- reelle Zahlen (Abstraktion von Längen)
- komplexe Zahlen

Zahlen

Der wohl wichtigste Abstraktionsschritt in der Geschichte der Mathematik:

- "3 Äpfel" $\longrightarrow$ "3"

Danach gibt es auch (nicht unbedingt in dieser Reihenfolge)

- negative Zahlen (Abstraktion von Schulden?)
- rationale Zahlen (Abstraktion von Verhältnissen)
- reelle Zahlen (Abstraktion von Längen)
- komplexe Zahlen

Addition

Welche Eigenschaften hat die Addition ganzer Zahlen?

- $a + b$ ist wieder eine ganze Zahl;
- $a + 0 = a$ für alle ganzen Zahlen a;
- $a + (-a) = 0$ für jede ganze Zahl a;
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle ganzen Zahlen a, b, c;
- $a + b = b + a$ für alle ganzen Zahlen a, b.

Ebenso funktioniert die Addition rationaler oder reeller Zahlen.

Addition

Welche Eigenschaften hat die Addition ganzer Zahlen?

- $a + b$ ist wieder eine ganze Zahl;
- $a + 0 = a$ für alle ganzen Zahlen a;
- $a + (-a) = 0$ für jede ganze Zahl a;
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle ganzen Zahlen a, b, c;
- $a + b = b + a$ für alle ganzen Zahlen a, b.

Ebenso funktioniert die Addition rationaler oder reeller Zahlen.

Addition

Welche Eigenschaften hat die Addition ganzer Zahlen?

- $a + b$ ist wieder eine ganze Zahl;
- $a + 0 = a$ für alle ganzen Zahlen a;
- $a + (-a) = 0$ für jede ganze Zahl a;
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle ganzen Zahlen a, b, c;
- $a + b = b + a$ für alle ganzen Zahlen a, b.

Ebenso funktioniert die Addition rationaler oder reeller Zahlen.

Addition

Welche Eigenschaften hat die Addition ganzer Zahlen?

- $a + b$ ist wieder eine ganze Zahl;
- $a + 0 = a$ für alle ganzen Zahlen a;
- $a + (-a) = 0$ für jede ganze Zahl a;
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle ganzen Zahlen a, b, c;
- $a + b = b + a$ für alle ganzen Zahlen a, b.

Ebenso funktioniert die Addition rationaler oder reeller Zahlen.

Addition

Welche Eigenschaften hat die Addition ganzer Zahlen?

- $a + b$ ist wieder eine ganze Zahl;
- $a + 0 = a$ für alle ganzen Zahlen a;
- $a + (-a) = 0$ für jede ganze Zahl a;
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle ganzen Zahlen a, b, c;
- $a + b = b + a$ für alle ganzen Zahlen a, b.

Ebenso funktioniert die Addition rationaler oder reeller Zahlen.

Addition

Welche Eigenschaften hat die Addition ganzer Zahlen?

- $a+b$ ist wieder eine ganze Zahl;
- $a+0=a$ für alle ganzen Zahlen a;
- $a+(-a)=0$ für jede ganze Zahl a;
- $a+(b+c)=(a+b)+c$ für alle ganzen Zahlen a, b, c;
- $a+b=b+a$ für alle ganzen Zahlen a, b.

Ebenso funktioniert die Addition rationaler oder reeller Zahlen.

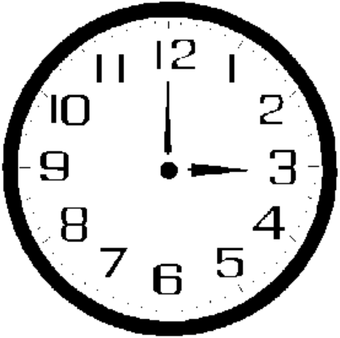
Addition

Welche Eigenschaften hat die Addition ganzer Zahlen?

- $a + b$ ist wieder eine ganze Zahl;
- $a + 0 = a$ für alle ganzen Zahlen a;
- $a + (-a) = 0$ für jede ganze Zahl a;
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle ganzen Zahlen a, b, c;
- $a + b = b + a$ für alle ganzen Zahlen a, b.

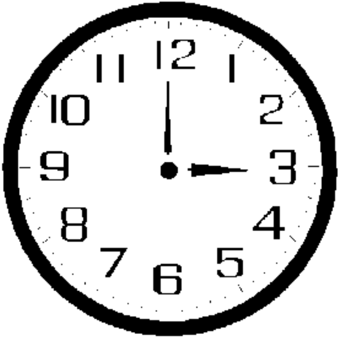
Ebenso funktioniert die Addition rationaler oder reeller Zahlen.

Uhren



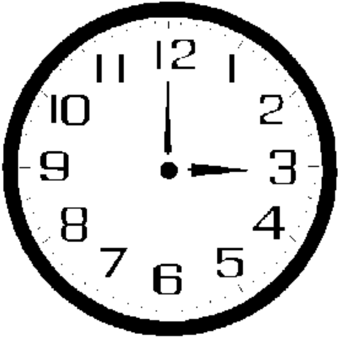
- $1 + 2 = 3$ aber
- $11 + 2 = 1$
- $3 + 124 = 7$

Uhren



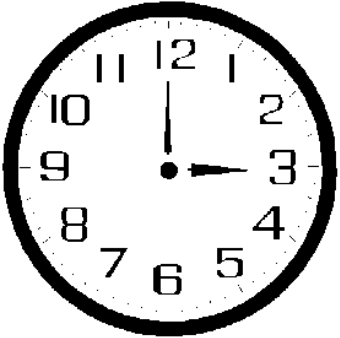
- $1 + 2 = 3$ aber
- $11 + 2 = 1$
- $3 + 124 = 7$

Uhren



- $1 + 2 = 3$ aber
- $11 + 2 = 1$
- $3 + 124 = 7$

Uhren



- $1 + 2 = 3$ aber
- $11 + 2 = 1$
- $3 + 124 = 7$

Modulorechnen

Addition modulo 6

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Addition modulo 5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Modulorechnen

Addition modulo 6

$+$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Addition modulo 5

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Modulorechnen

Auch hier gilt, für alle natürlichen Zahlen n:

- $a + b \mod n$ ist wieder eine natürliche Zahl kleiner als n;
- $a + 0 \equiv a \mod n$ für alle natürlichen Zahlen $a < n$;
- $a + (n - a) \equiv 0 \mod n$ für jede natürliche Zahl $a < n$;
- $a + (b + c) \equiv (a + b) + c \mod n$ für alle natürlichen Zahlen $a, b, c < n$;
- $a + b \equiv b + a \mod n$ für alle natürlichen Zahlen $a, b < n$.

Modulorechnen

Auch hier gilt, für alle natürlichen Zahlen n:

- $a + b \mod n$ ist wieder eine natürliche Zahl kleiner als n;
- $a + 0 \equiv a \mod n$ für alle natürlichen Zahlen $a < n$;
- $a + (n - a) \equiv 0 \mod n$ für jede natürliche Zahl $a < n$;
- $a + (b + c) \equiv (a + b) + c \mod n$ für alle natürlichen Zahlen $a, b, c < n$;
- $a + b \equiv b + a \mod n$ für alle natürlichen Zahlen $a, b < n$.

Modulorechnen

Auch hier gilt, für alle natürlichen Zahlen n:

- $a + b \mod n$ ist wieder eine natürliche Zahl kleiner als n;
- $a + 0 \equiv a \mod n$ für alle natürlichen Zahlen $a < n$;
- $a + (n - a) \equiv 0 \mod n$ für jede natürliche Zahl $a < n$;
- $a + (b + c) \equiv (a + b) + c \mod n$ für alle natürlichen Zahlen $a, b, c < n$;
- $a + b \equiv b + a \mod n$ für alle natürlichen Zahlen $a, b < n$.

Modulorechnen

Auch hier gilt, für alle natürlichen Zahlen n:

- $a + b \mod n$ ist wieder eine natürliche Zahl kleiner als n;
- $a + 0 \equiv a \mod n$ für alle natürlichen Zahlen $a < n$;
- $a + (n - a) \equiv 0 \mod n$ für jede natürliche Zahl $a < n$;
- $a + (b + c) \equiv (a + b) + c \mod n$ für alle natürlichen Zahlen $a, b, c < n$;
- $a + b \equiv b + a \mod n$ für alle natürlichen Zahlen $a, b < n$.

Modulorechnen

Auch hier gilt, für alle natürlichen Zahlen n:

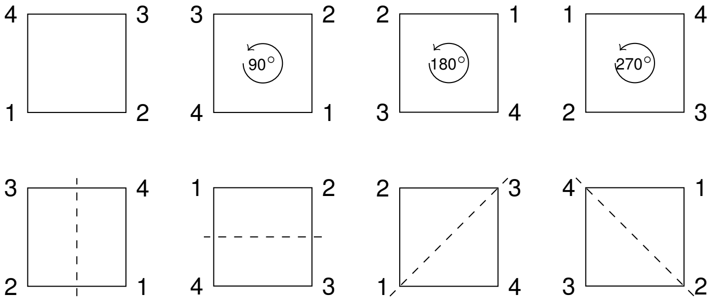
- $a + b \mod n$ ist wieder eine natürliche Zahl kleiner als n;
- $a + 0 \equiv a \mod n$ für alle natürlichen Zahlen $a < n$;
- $a + (n - a) \equiv 0 \mod n$ für jede natürliche Zahl $a < n$;
- $a + (b + c) \equiv (a + b) + c \mod n$ für alle natürlichen Zahlen $a, b, c < n$;
- $a + b \equiv b + a \mod n$ für alle natürlichen Zahlen $a, b < n$.

Modulorechnen

Auch hier gilt, für alle natürlichen Zahlen n:

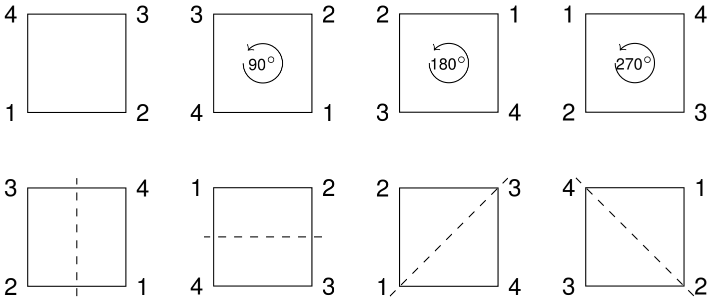
- $a + b \mod n$ ist wieder eine natürliche Zahl kleiner als n;
- $a + 0 \equiv a \mod n$ für alle natürlichen Zahlen $a < n$;
- $a + (n - a) \equiv 0 \mod n$ für jede natürliche Zahl $a < n$;
- $a + (b + c) \equiv (a + b) + c \mod n$ für alle natürlichen Zahlen $a, b, c < n$;
- $a + b \equiv b + a \mod n$ für alle natürlichen Zahlen $a, b < n$.

Symmetrien eines Vierecks



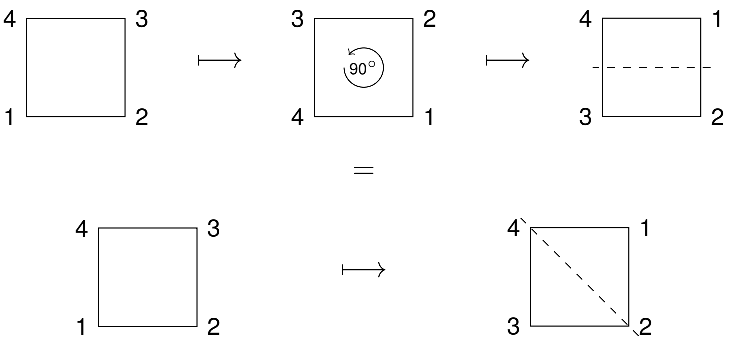
Diese Symmetrien kann man hintereinander ausführen und erhält wieder eine solche Symmetrie.

Symmetrien eines Vierecks

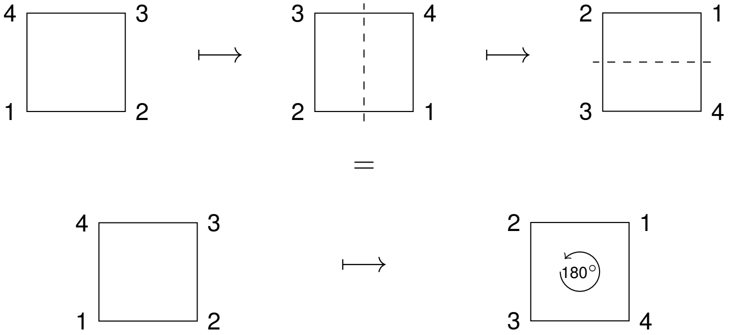


Diese Symmetrien kann man hintereinander ausführen und erhält wieder eine solche Symmetrie.

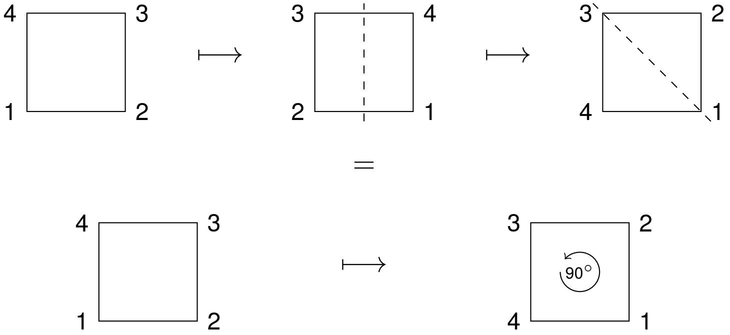
Verknüpfung von Symmetrien



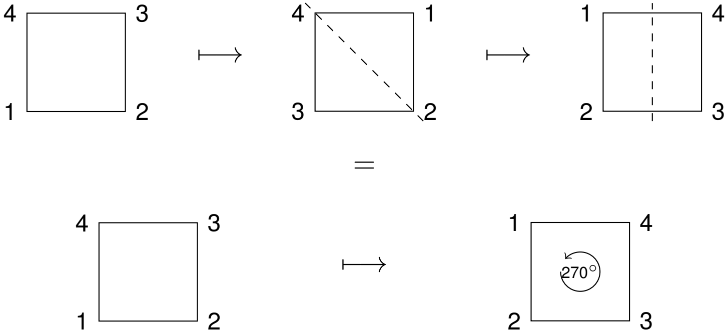
Verknüpfung von Symmetrien



Verknüpfung von Symmetrien



Verknüpfung von Symmetrien



Symmetrien eines Vierecks

Für die Symmetrien gilt:

- $g \circ h$ ist wieder eine Symmetrie für alle Symmetrien g, h;
- es gibt eine Symmetrie e “nichts tun”, sodass $g \circ e = g = e \circ g$ für alle Symmetrien g;
- es gibt für jede Symmetrie g eine Symmetrie g^{-1} sodass $g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g$;
- $g \circ (h \circ k) = (g \circ h) \circ k$ für alle Symmetrien g, h, k.

Aber nicht

- $g \circ h = h \circ g$!!

Symmetrien eines Vierecks

Für die Symmetrien gilt:

- $g \circ h$ ist wieder eine Symmetrie für alle Symmetrien g, h;
- es gibt eine Symmetrie e "nichts tun", sodass $g \circ e = g = e \circ g$ für alle Symmetrien g;
- es gibt für jede Symmetrie g eine Symmetrie g^{-1} sodass $g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g$;
- $g \circ (h \circ k) = (g \circ h) \circ k$ für alle Symmetrien g, h, k.

Aber nicht

- $g \circ h = h \circ g$!!

Symmetrien eines Vierecks

Für die Symmetrien gilt:

- $g \circ h$ ist wieder eine Symmetrie für alle Symmetrien g, h;
- es gibt eine Symmetrie e "nichts tun", sodass $g \circ e = g = e \circ g$ für alle Symmetrien g;
- es gibt für jede Symmetrie g eine Symmetrie g^{-1} sodass $g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g$;
- $g \circ (h \circ k) = (g \circ h) \circ k$ für alle Symmetrien g, h, k.

Aber nicht

- $g \circ h = h \circ g$!!

Symmetrien eines Vierecks

Für die Symmetrien gilt:

- $g \circ h$ ist wieder eine Symmetrie für alle Symmetrien g, h;
- es gibt eine Symmetrie e “nichts tun”, sodass $g \circ e = g = e \circ g$ für alle Symmetrien g;
- es gibt für jede Symmetrie g eine Symmetrie g^{-1} sodass $g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g$;
- $g \circ (h \circ k) = (g \circ h) \circ k$ für alle Symmetrien g, h, k.

Aber nicht

- $g \circ h = h \circ g$!!

Symmetrien eines Vierecks

Für die Symmetrien gilt:

- $g \circ h$ ist wieder eine Symmetrie für alle Symmetrien g, h;
- es gibt eine Symmetrie e “nichts tun”, sodass $g \circ e = g = e \circ g$ für alle Symmetrien g;
- es gibt für jede Symmetrie g eine Symmetrie g^{-1} sodass $g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g$;
- $g \circ (h \circ k) = (g \circ h) \circ k$ für alle Symmetrien g, h, k.

Aber nicht

- $g \circ h = h \circ g$!!

Symmetrien eines Vierecks

Für die Symmetrien gilt:

- $g \circ h$ ist wieder eine Symmetrie für alle Symmetrien g, h;
- es gibt eine Symmetrie e “nichts tun”, sodass $g \circ e = g = e \circ g$ für alle Symmetrien g;
- es gibt für jede Symmetrie g eine Symmetrie g^{-1} sodass $g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g$;
- $g \circ (h \circ k) = (g \circ h) \circ k$ für alle Symmetrien g, h, k.

Aber nicht

- $g \circ h = h \circ g$!!

Gruppen

Definition

Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $*$ mit den Axiomen

- $g * h \in G$ für $g, h \in G$;
- es existiert $e \in G$ sodass $g * e = g = e * g$ für $g \in G$ (neutrales Element);
- für jedes $g \in G$ existiert $g^{-1} \in G$ sodass $g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$ (Inverse);
- $g * (h * k) = (g * h) * k$ für alle $g, h, k \in G$ (Assoziativität).

Wenn ausserdem gilt

- $g * h = h * g$ für alle $g, h \in G$,

dann heißt die Gruppe kommutativ oder abelsch.

Gruppen

Definition

Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $*$ mit den Axiomen

- $g * h \in G$ für $g, h \in G$;
- es existiert $e \in G$ sodass $g * e = g = e * g$ für $g \in G$ (neutrales Element);
- für jedes $g \in G$ existiert $g^{-1} \in G$ sodass $g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$ (Inverse);
- $g * (h * k) = (g * h) * k$ für alle $g, h, k \in G$ (Assoziativität).

Wenn ausserdem gilt

- $g * h = h * g$ für alle $g, h \in G$,

dann heißt die Gruppe kommutativ oder abelsch.

Gruppen

Definition

Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $*$ mit den Axiomen

- $g * h \in G$ für $g, h \in G$;
- es existiert $e \in G$ sodass $g * e = g = e * g$ für $g \in G$ (neutrales Element);
- für jedes $g \in G$ existiert $g^{-1} \in G$ sodass $g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$ (Inverse);
- $g * (h * k) = (g * h) * k$ für alle $g, h, k \in G$ (Assoziativität).

Wenn ausserdem gilt

- $g * h = h * g$ für alle $g, h \in G$,

dann heißt die Gruppe kommutativ oder abelsch.

Gruppen

Definition

Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $*$ mit den Axiomen

- $g * h \in G$ für $g, h \in G$;
- es existiert $e \in G$ sodass $g * e = g = e * g$ für $g \in G$ (neutrales Element);
- für jedes $g \in G$ existiert $g^{-1} \in G$ sodass $g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$ (Inverse);
- $g * (h * k) = (g * h) * k$ für alle $g, h, k \in G$ (Assoziativität).

Wenn ausserdem gilt

- $g * h = h * g$ für alle $g, h \in G$,

dann heißt die Gruppe kommutativ oder abelsch.

Gruppen

Definition

Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $*$ mit den Axiomen

- $g * h \in G$ für $g, h \in G$;
- es existiert $e \in G$ sodass $g * e = g = e * g$ für $g \in G$ (neutrales Element);
- für jedes $g \in G$ existiert $g^{-1} \in G$ sodass $g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$ (Inverse);
- $g * (h * k) = (g * h) * k$ für alle $g, h, k \in G$ (Assoziativität).

Wenn ausserdem gilt

- $g * h = h * g$ für alle $g, h \in G$,

dann heißt die Gruppe kommutativ oder abelsch.

Beispiele von Gruppen

- $(\mathbb{Z}, +, 0)$: ganze Zahlen mit Addition, Null und Inversen $-a$;
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, 0)$: Zahlen modulo n mit Addition, Null und Inversen $n - a$;
- $(\mathbb{Q}^*, \times, 1)$: rationale Zahlen ohne Null mit Multiplikation, Eins und Inversen $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$;
- Symmetriegruppen von Dreiecken, Vierecken, Fünfecken, ..., n-Ecken;
- Symmetrie- und Rotationsgruppen von Würfeln, Tobleroneschachteln,...
- $(\mathbb{R}^3, +, 0)$: Vektoren mit Addition, Nullvektor und Inversen $(-x_1, -x_2, -x_3)$;
- $(\mathrm{GL}_n, \times, I)$: Matrizen mit Determinante ungleich 0 mit Matrixmultiplikation, Einheitsmatrix I und Inversen A^{-1};
- viele viele mehr.

Beispiele von Gruppen

- $(\mathbb{Z}, +, 0)$: ganze Zahlen mit Addition, Null und Inversen $-a$;
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, 0)$: Zahlen modulo n mit Addition, Null und Inversen $n - a$;
- $(\mathbb{Q}^*, \times, 1)$: rationale Zahlen ohne Null mit Multiplikation, Eins und Inversen $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$;
- Symmetriegruppen von Dreiecken, Vierecken, Fünfecken, ..., n-Ecken;
- Symmetrie- und Rotationsgruppen von Würfeln, Tobleroneschachteln,...
- $(\mathbb{R}^3, +, 0)$: Vektoren mit Addition, Nullvektor und Inversen $(-x_1, -x_2, -x_3)$;
- $(\mathrm{GL}_n, \times, I)$: Matrizen mit Determinante ungleich 0 mit Matrixmultiplikation, Einheitsmatrix I und Inversen A^{-1};
- viele viele mehr.

Beispiele von Gruppen

- $(\mathbb{Z}, +, 0)$: ganze Zahlen mit Addition, Null und Inversen $-a$;
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, 0)$: Zahlen modulo n mit Addition, Null und Inversen $n - a$;
- $(\mathbb{Q}^*, \times, 1)$: rationale Zahlen ohne Null mit Multiplikation, Eins und Inversen $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$;
- Symmetriegruppen von Dreiecken, Vierecken, Fünfecken, ..., n-Ecken;
- Symmetrie- und Rotationsgruppen von Würfeln, Tobleroneschachteln,...
- $(\mathbb{R}^3, +, 0)$: Vektoren mit Addition, Nullvektor und Inversen $(-x_1, -x_2, -x_3)$;
- $(\mathrm{GL}_n, \times, I)$: Matrizen mit Determinante ungleich 0 mit Matrixmultiplikation, Einheitsmatrix I und Inversen A^{-1};
- viele viele mehr.

Beispiele von Gruppen

- $(\mathbb{Z}, +, 0)$: ganze Zahlen mit Addition, Null und Inversen $-a$;
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, 0)$: Zahlen modulo n mit Addition, Null und Inversen $n - a$;
- $(\mathbb{Q}^*, \times, 1)$: rationale Zahlen ohne Null mit Multiplikation, Eins und Inversen $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$;
- Symmetriegruppen von Dreiecken, Vierecken, Fünfecken, ..., n-Ecken;
- Symmetrie- und Rotationsgruppen von Würfeln, Tobleroneschachteln,...
- $(\mathbb{R}^3, +, 0)$: Vektoren mit Addition, Nullvektor und Inversen $(-x_1, -x_2, -x_3)$;
- $(\mathrm{GL}_n, \times, I)$: Matrizen mit Determinante ungleich 0 mit Matrixmultiplikation, Einheitsmatrix I und Inversen A^{-1};
- viele viele mehr.

Beispiele von Gruppen

- $(\mathbb{Z}, +, 0)$: ganze Zahlen mit Addition, Null und Inversen $-a$;
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, 0)$: Zahlen modulo n mit Addition, Null und Inversen $n - a$;
- $(\mathbb{Q}^*, \times, 1)$: rationale Zahlen ohne Null mit Multiplikation, Eins und Inversen $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$;
- Symmetriegruppen von Dreiecken, Vierecken, Fünfecken, ..., n-Ecken;
- Symmetrie- und Rotationsgruppen von Würfeln, Tobleroneschachteln,...
- $(\mathbb{R}^3, +, 0)$: Vektoren mit Addition, Nullvektor und Inversen $(-x_1, -x_2, -x_3)$;
- $(\mathrm{GL}_n, \times, I)$: Matrizen mit Determinante ungleich 0 mit Matrixmultiplikation, Einheitsmatrix I und Inversen A^{-1};
- viele viele mehr.

Beispiele von Gruppen

- $(\mathbb{Z}, +, 0)$: ganze Zahlen mit Addition, Null und Inversen $-a$;
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, 0)$: Zahlen modulo n mit Addition, Null und Inversen $n - a$;
- $(\mathbb{Q}^*, \times, 1)$: rationale Zahlen ohne Null mit Multiplikation, Eins und Inversen $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$;
- Symmetriegruppen von Dreiecken, Vierecken, Fünfecken, ..., n-Ecken;
- Symmetrie- und Rotationsgruppen von Würfeln, Tobleroneschachteln,...
- $(\mathbb{R}^3, +, 0)$: Vektoren mit Addition, Nullvektor und Inversen $(-x_1, -x_2, -x_3)$;
- $(\mathrm{GL}_n, \times, I)$: Matrizen mit Determinante ungleich 0 mit Matrixmultiplikation, Einheitsmatrix I und Inversen A^{-1};
- viele viele mehr.

Beispiele von Gruppen

- $(\mathbb{Z}, +, 0)$: ganze Zahlen mit Addition, Null und Inversen $-a$;
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, 0)$: Zahlen modulo n mit Addition, Null und Inversen $n - a$;
- $(\mathbb{Q}^*, \times, 1)$: rationale Zahlen ohne Null mit Multiplikation, Eins und Inversen $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$;
- Symmetriegruppen von Dreiecken, Vierecken, Fünfecken, ..., n-Ecken;
- Symmetrie- und Rotationsgruppen von Würfeln, Tobleroneschachteln,...
- $(\mathbb{R}^3, +, 0)$: Vektoren mit Addition, Nullvektor und Inversen $(-x_1, -x_2, -x_3)$;
- $(\mathrm{GL}_n, \times, I)$: Matrizen mit Determinante ungleich 0 mit Matrixmultiplikation, Einheitsmatrix I und Inversen A^{-1};
- viele viele mehr.

Beispiele von Gruppen

- $(\mathbb{Z}, +, 0)$: ganze Zahlen mit Addition, Null und Inversen $-a$;
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, 0)$: Zahlen modulo n mit Addition, Null und Inversen $n - a$;
- $(\mathbb{Q}^*, \times, 1)$: rationale Zahlen ohne Null mit Multiplikation, Eins und Inversen $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$;
- Symmetriegruppen von Dreiecken, Vierecken, Fünfecken, ..., n-Ecken;
- Symmetrie- und Rotationsgruppen von Würfeln, Tobleroneschachteln,...
- $(\mathbb{R}^3, +, 0)$: Vektoren mit Addition, Nullvektor und Inversen $(-x_1, -x_2, -x_3)$;
- $(\mathrm{GL}_n, \times, I)$: Matrizen mit Determinante ungleich 0 mit Matrixmultiplikation, Einheitsmatrix I und Inversen A^{-1};
- viele viele mehr.

Modulorechnen mit Multiplikation

Multiplikation modulo 6

$\times$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

Multiplikation modulo 5

$\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Modulorechnen mit Multiplikation

Multiplikation modulo 6

$\times$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

Multiplikation modulo 5

$\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Resultate

Lemma

In einer Gruppe G sind das neutrale Element und die Inverse eindeutig.

Beweis.

Wenn wir zwei hätten, e und e', dann gilt: $e * e' = e$ weil e' ein neutrales Element ist, aber auch $e * e' = e'$ weil e ein neutrales Element ist. Also $e = e'$.

Wenn wir für ein Element $g \in G$ zwei Inverse hätten, sagen wir g^{-1} und h, dann gilt:

$$g^{-1} = g^{-1} * e = g^{-1} * (g * h) = (g^{-1} * g) * h = e * h = h$$

Also $g^{-1} = h$. □

Resultate

Lemma

In einer Gruppe G sind das neutrale Element und die Inverse eindeutig.

Beweis.

Wenn wir zwei hätten, e und e', dann gilt: $e * e' = e$ weil e' ein neutrales Element ist, aber auch $e * e' = e'$ weil e ein neutrales Element ist. Also $e = e'$.

Wenn wir für ein Element $g \in G$ zwei Inverse hätten, sagen wir g^{-1} und h, dann gilt:

$$g^{-1} = g^{-1} * e = g^{-1} * (g * h) = (g^{-1} * g) * h = e * h = h$$

Also $g^{-1} = h$. □

Resultate

Lemma

In einer Gruppe G sind das neutrale Element und die Inverse eindeutig.

Beweis.

Wenn wir zwei hätten, e und e', dann gilt: $e * e' = e$ weil e' ein neutrales Element ist, aber auch $e * e' = e'$ weil e ein neutrales Element ist. Also $e = e'$.

Wenn wir für ein Element $g \in G$ zwei Inverse hätten, sagen wir g^{-1} und h, dann gilt:

$$g^{-1} = g^{-1} * e = g^{-1} * (g * h) = (g^{-1} * g) * h = e * h = h$$

Also $g^{-1} = h$. □

Anwendungen

Gruppen werden zum Beispiel in Kryptographie verwendet.

- RSA Algorithmus benutzt Modulorechnung.
- Es gibt noch modernere Verschlüsslung mit Gruppen auf elliptischen Kurven.

Anwendungen

Gruppen werden zum Beispiel in Kryptographie verwendet.

- RSA Algorithmus benutzt Modulorechnung.
- Es gibt noch modernere Verschlüsslung mit Gruppen auf elliptischen Kurven.

Anwendungen

Gruppen werden zum Beispiel in Kryptographie verwendet.

- RSA Algorithmus benutzt Modulorechnung.
- Es gibt noch modernere Verschlüsslung mit Gruppen auf elliptischen Kurven.

Gruppenhomomorphismen

Definition

Ein Gruppenhomomorphismus ist eine Abbildung $f\colon G \longrightarrow H$ zwischen zwei Gruppen $(G, *_G, e_G)$ und $(H, *_H, e_H)$ sodass $f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$ für alle $a, b \in G$.

Beispiele:

- $f\colon (\mathbb{Z}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, 0)$ mit $f(a) = a$;
- $f\colon (\mathbb{Z}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, 0)$ mit $f(a) = a \mod n$;
- $f\colon (\mathbb{R}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times, 1)$ mit $f(x) = e^x$ (da $e^{x+y} = e^x e^y$);
- $\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times, 1)$ da $\det AB = \det A \det B$;

Gruppenhomomorphismen

Definition

Ein Gruppenhomomorphismus ist eine Abbildung $f\colon G \longrightarrow H$ zwischen zwei Gruppen $(G, *_G, e_G)$ und $(H, *_H, e_H)$ sodass $f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$ für alle $a, b \in G$.

Beispiele:

- $f\colon (\mathbb{Z}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, 0)$ mit $f(a) = a$;
- $f\colon (\mathbb{Z}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, 0)$ mit $f(a) = a \mod n$;
- $f\colon (\mathbb{R}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times, 1)$ mit $f(x) = e^x$ (da $e^{x+y} = e^x e^y$);
- $\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times, 1)$ da $\det AB = \det A \det B$;

Gruppenhomomorphismen

Definition

Ein Gruppenhomomorphismus ist eine Abbildung $f\colon G \longrightarrow H$ zwischen zwei Gruppen $(G, *_G, e_G)$ und $(H, *_H, e_H)$ sodass $f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$ für alle $a, b \in G$.

Beispiele:

- $f\colon (\mathbb{Z}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, 0)$ mit $f(a) = a$;
- $f\colon (\mathbb{Z}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, 0)$ mit $f(a) = a \mod n$;
- $f\colon (\mathbb{R}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times, 1)$ mit $f(x) = e^x$ (da $e^{x+y} = e^x e^y$);
- $\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times, 1)$ da $\det AB = \det A \det B$;

Gruppenhomomorphismen

Definition

Ein Gruppenhomomorphismus ist eine Abbildung $f\colon G \longrightarrow H$ zwischen zwei Gruppen $(G, *_G, e_G)$ und $(H, *_H, e_H)$ sodass $f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$ für alle $a, b \in G$.

Beispiele:

- $f\colon (\mathbb{Z}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, 0)$ mit $f(a) = a$;
- $f\colon (\mathbb{Z}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, 0)$ mit $f(a) = a \mod n$;
- $f\colon (\mathbb{R}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times, 1)$ mit $f(x) = e^x$ (da $e^{x+y} = e^x e^y$);
- $\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times, 1)$ da $\det AB = \det A \det B$;

Gruppenhomomorphismen

Definition

Ein Gruppenhomomorphismus ist eine Abbildung $f\colon G \longrightarrow H$ zwischen zwei Gruppen $(G, *_G, e_G)$ und $(H, *_H, e_H)$ sodass $f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$ für alle $a, b \in G$.

Beispiele:

- $f\colon (\mathbb{Z}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, 0)$ mit $f(a) = a$;
- $f\colon (\mathbb{Z}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, 0)$ mit $f(a) = a \mod n$;
- $f\colon (\mathbb{R}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times, 1)$ mit $f(x) = e^x$ (da $e^{x+y} = e^x e^y$);
- $\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times, 1)$ da $\det AB = \det A \det B$;

Gruppenhomomorphismen

Definition

Ein Gruppenhomomorphismus ist eine Abbildung $f\colon G \longrightarrow H$ zwischen zwei Gruppen $(G, *_G, e_G)$ und $(H, *_H, e_H)$ sodass $f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$ für alle $a, b \in G$.

Beispiele:

- $f\colon (\mathbb{Z}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, 0)$ mit $f(a) = a$;
- $f\colon (\mathbb{Z}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, 0)$ mit $f(a) = a \mod n$;
- $f\colon (\mathbb{R}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times, 1)$ mit $f(x) = e^x$ (da $e^{x+y} = e^x e^y$);
- $\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times, 1)$ da $\det AB = \det A \det B$;

Einheitskreis

Beispiel: Einheitskreis in den komplexen Zahlen

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{ix} | x \in \mathbb{R}\}$$

Ist dies eine Gruppe?

- $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ ist wieder in S^1.
- $e^{i0} = 1$ ist das neutrale Element, es ist also in S^1.
- $e^{ix}e^{-ix} = e^{i(x-x)} = e^{i0} = 1$, also haben alle Elemente ein Inverses.
- Um Assoziativität brauchen wir uns nicht zu kümmern, die kommt automatisch von $\mathbb{C}$.

Einheitskreis

Beispiel: Einheitskreis in den komplexen Zahlen

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{ix} | x \in \mathbb{R}\}$$

Ist dies eine Gruppe?

- $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ ist wieder in S^1.
- $e^{i0} = 1$ ist das neutrale Element, es ist also in S^1.
- $e^{ix}e^{-ix} = e^{i(x-x)} = e^{i0} = 1$, also haben alle Elemente ein Inverses.
- Um Assoziativität brauchen wir uns nicht zu kümmern, die kommt automatisch von $\mathbb{C}$.

Einheitskreis

Beispiel: Einheitskreis in den komplexen Zahlen

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{ix} | x \in \mathbb{R}\}$$

Ist dies eine Gruppe?

- $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ ist wieder in S^1.
- $e^{i0} = 1$ ist das neutrale Element, es ist also in S^1.
- $e^{ix}e^{-ix} = e^{i(x-x)} = e^{i0} = 1$, also haben alle Elemente ein Inverses.
- Um Assoziativität brauchen wir uns nicht zu kümmern, die kommt automatisch von $\mathbb{C}$.

Einheitskreis

Beispiel: Einheitskreis in den komplexen Zahlen

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{ix} | x \in \mathbb{R}\}$$

Ist dies eine Gruppe?

- $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ ist wieder in S^1.
- $e^{i0} = 1$ ist das neutrale Element, es ist also in S^1.
- $e^{ix}e^{-ix} = e^{i(x-x)} = e^{i0} = 1$, also haben alle Elemente ein Inverses.
- Um Assoziativität brauchen wir uns nicht zu kümmern, die kommt automatisch von $\mathbb{C}$.

Einheitskreis

Beispiel: Einheitskreis in den komplexen Zahlen

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{ix} | x \in \mathbb{R}\}$$

Ist dies eine Gruppe?

- $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ ist wieder in S^1.
- $e^{i0} = 1$ ist das neutrale Element, es ist also in S^1.
- $e^{ix}e^{-ix} = e^{i(x-x)} = e^{i0} = 1$, also haben alle Elemente ein Inverses.
- Um Assoziativität brauchen wir uns nicht zu kümmern, die kommt automatisch von $\mathbb{C}$.

Gleichheit

Welche Eigenschaften hat „ist gleich“?

- „a ist gleich a“;
- Aus „a ist gleich b“ folgt „b ist gleich a“;
- Aus „a ist gleich b“ und „b ist gleich c“ folgt „a ist gleich c“.

Gibt es andere Beispiele ausser „ist gleich“, die auch diese Eigenschaften haben?

Gleichheit

Welche Eigenschaften hat „ist gleich“?

- „a ist gleich a“;
- Aus „a ist gleich b“ folgt „b ist gleich a“;
- Aus „a ist gleich b“ und „b ist gleich c“ folgt „a ist gleich c“.

Gibt es andere Beispiele ausser „ist gleich“, die auch diese Eigenschaften haben?

Gleichheit

Welche Eigenschaften hat „ist gleich“?

- „a ist gleich a“;
- Aus „a ist gleich b“ folgt „b ist gleich a“;
- Aus „a ist gleich b“ und „b ist gleich c“ folgt „a ist gleich c“.

Gibt es andere Beispiele ausser „ist gleich“, die auch diese Eigenschaften haben?

Gleichheit

Welche Eigenschaften hat „ist gleich“?

- „a ist gleich a“;
- Aus „a ist gleich b“ folgt „b ist gleich a“;
- Aus „a ist gleich b“ und „b ist gleich c“ folgt „a ist gleich c“.

Gibt es andere Beispiele ausser „ist gleich“, die auch diese Eigenschaften haben?

Gleichheit

Welche Eigenschaften hat „ist gleich“?

- „a ist gleich a“;
- Aus „a ist gleich b“ folgt „b ist gleich a“;
- Aus „a ist gleich b“ und „b ist gleich c“ folgt „a ist gleich c“.

Gibt es andere Beispiele ausser „ist gleich“, die auch diese Eigenschaften haben?

Geburtstage

Wir versuchen „im selben Monat Geburtstag haben“.

Publikumsbeteiligung: Wer hat im Oktober Geburtstag?

- Elfriede hat im selben Monat Geburtstag wie Elfriede.
- Wenn Elfriede im selben Monat Geburtstag hat wie Julia, dann hat Julia im selben Monat Geburtstag wie Elfriede.
- Wenn Elfriede im selben Monat Geburtstag hat wie Julia und Julia im selben Monat Geburtstag hat wie Herr Ketter, dann hat Elfriede im selben Monat Geburtstag wie Herr Ketter.

Geburtstage

Wir versuchen „im selben Monat Geburtstag haben“.

Publikumsbeteiligung: Wer hat im Oktober Geburtstag?

- Elfriede hat im selben Monat Geburtstag wie Elfriede.
- Wenn Elfriede im selben Monat Geburtstag hat wie Julia, dann hat Julia im selben Monat Geburtstag wie Elfriede.
- Wenn Elfriede im selben Monat Geburtstag hat wie Julia und Julia im selben Monat Geburtstag hat wie Herr Ketter, dann hat Elfriede im selben Monat Geburtstag wie Herr Ketter.

Geburtstage

Wir versuchen „im selben Monat Geburtstag haben“.

Publikumsbeteiligung: Wer hat im Oktober Geburtstag?

- Elfriede hat im selben Monat Geburtstag wie Elfriede.
- Wenn Elfriede im selben Monat Geburtstag hat wie Julia, dann hat Julia im selben Monat Geburtstag wie Elfriede.
- Wenn Elfriede im selben Monat Geburtstag hat wie Julia und Julia im selben Monat Geburtstag hat wie Herr Ketter, dann hat Elfriede im selben Monat Geburtstag wie Herr Ketter.

Geburtstage

Wir versuchen „im selben Monat Geburtstag haben“.

Publikumsbeteiligung: Wer hat im Oktober Geburtstag?

- Elfriede hat im selben Monat Geburtstag wie Elfriede.
- Wenn Elfriede im selben Monat Geburtstag hat wie Julia, dann hat Julia im selben Monat Geburtstag wie Elfriede.
- Wenn Elfriede im selben Monat Geburtstag hat wie Julia und Julia im selben Monat Geburtstag hat wie Herr Ketter, dann hat Elfriede im selben Monat Geburtstag wie Herr Ketter.

Geburtstage

Wir versuchen „im selben Monat Geburtstag haben“.

Publikumsbeteiligung: Wer hat im Oktober Geburtstag?

- Elfriede hat im selben Monat Geburtstag wie Elfriede.
- Wenn Elfriede im selben Monat Geburtstag hat wie Julia, dann hat Julia im selben Monat Geburtstag wie Elfriede.
- Wenn Elfriede im selben Monat Geburtstag hat wie Julia und Julia im selben Monat Geburtstag hat wie Herr Ketter, dann hat Elfriede im selben Monat Geburtstag wie Herr Ketter.

Äquivalenzrelationen

Definition

Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X ist eine Relation $\sim$ sodass gilt:

- $x \sim x$ für alle $x \in X$ (Reflexivität);
- Wenn $x \sim y$ dann $y \sim x$ für alle $x, y \in X$ (Symmetrie);
- Wenn $x \sim y$ und $y \sim z$ dann $x \sim z$ für alle $x, y, z \in X$ (Transitivität).

Äquivalenzrelationen

Definition

Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X ist eine Relation $\sim$ sodass gilt:

- $x \sim x$ für alle $x \in X$ (Reflexivität);
- Wenn $x \sim y$ dann $y \sim x$ für alle $x, y \in X$ (Symmetrie);
- Wenn $x \sim y$ und $y \sim z$ dann $x \sim z$ für alle $x, y, z \in X$ (Transitivität).

Äquivalenzrelationen

Definition

Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X ist eine Relation $\sim$ sodass gilt:

- $x \sim x$ für alle $x \in X$ (Reflexivität);
- Wenn $x \sim y$ dann $y \sim x$ für alle $x, y \in X$ (Symmetrie);
- Wenn $x \sim y$ und $y \sim z$ dann $x \sim z$ für alle $x, y, z \in X$ (Transitivität).

Äquivalenzrelationen

Definition

Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X ist eine Relation $\sim$ sodass gilt:

- $x \sim x$ für alle $x \in X$ (Reflexivität);
- Wenn $x \sim y$ dann $y \sim x$ für alle $x, y \in X$ (Symmetrie);
- Wenn $x \sim y$ und $y \sim z$ dann $x \sim z$ für alle $x, y, z \in X$ (Transitivität).

Beispiele von Äquivalenzrelation

- Gleichheit
- „im selben Monat Geburtstag haben"
- „die gleiche Haarfarbe haben"
- „die gleiche Größe haben"
- ...
- „den gleichen Rest modulo n haben"
- Äquivalenzrelation für rationalen Zahlen

Beispiele von Äquivalenzrelation

- Gleichheit
- „im selben Monat Geburtstag haben“
- „die gleiche Haarfarbe haben“
- „die gleiche Größe haben“
- ...
- „den gleichen Rest modulo n haben“
- Äquivalenzrelation für rationalen Zahlen

Beispiele von Äquivalenzrelation

- Gleichheit
- „im selben Monat Geburtstag haben“
- „die gleiche Haarfarbe haben“
- „die gleiche Größe haben“
- ...
- „den gleichen Rest modulo n haben“
- Äquivalenzrelation für rationalen Zahlen

Beispiele von Äquivalenzrelation

- Gleichheit
- „im selben Monat Geburtstag haben“
- „die gleiche Haarfarbe haben“
- „die gleiche Größe haben“
- ...
- „den gleichen Rest modulo n haben“
- Äquivalenzrelation für rationalen Zahlen

Beispiele von Äquivalenzrelation

- Gleichheit
- „im selben Monat Geburtstag haben“
- „die gleiche Haarfarbe haben“
- „die gleiche Größe haben“
- ...
- „den gleichen Rest modulo n haben“
- Äquivalenzrelation für rationalen Zahlen

Beispiele von Äquivalenzrelation

- Gleichheit
- „im selben Monat Geburtstag haben“
- „die gleiche Haarfarbe haben“
- „die gleiche Größe haben“
- ...
- „den gleichen Rest modulo n haben“
- Äquivalenzrelation für rationalen Zahlen

Beispiele von Äquivalenzrelation

- Gleichheit
- „im selben Monat Geburtstag haben“
- „die gleiche Haarfarbe haben“
- „die gleiche Größe haben“
- ...
- „den gleichen Rest modulo n haben“
- Äquivalenzrelation für rationalen Zahlen

Rationale Zahlen

Wie können wir formal beschreiben, dass $\frac{1}{2}$ dieselbe rationale Zahl darstellt wie $\frac{2}{4}$? Wir nehmen an, dass wir bisher nur die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ kennen.

Wir nehmen die Menge $X = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ (Paare von ganzen Zahlen) und die Relation

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ genau dann wenn } ad = cb \in \mathbb{Z}$$

(Insgeheim: $ad = cb$ ist „dasselbe" wie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.)

Nun müssen wir überprüfen, ob dies wirklich eine Äquivalenzrelation ist.

Rationale Zahlen

Wie können wir formal beschreiben, dass $\frac{1}{2}$ dieselbe rationale Zahl darstellt wie $\frac{2}{4}$? Wir nehmen an, dass wir bisher nur die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ kennen.
Wir nehmen die Menge $X = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ (Paare von ganzen Zahlen) und die Relation

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ genau dann wenn } ad = cb \in \mathbb{Z}$$

(Insgeheim: $ad = cb$ ist „dasselbe" wie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.)
Nun müssen wir überprüfen, ob dies wirklich eine Äquivalenzrelation ist.

Rationale Zahlen

Wie können wir formal beschreiben, dass $\frac{1}{2}$ dieselbe rationale Zahl darstellt wie $\frac{2}{4}$? Wir nehmen an, dass wir bisher nur die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ kennen.
Wir nehmen die Menge $X = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ (Paare von ganzen Zahlen) und die Relation

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ genau dann wenn } ad = cb \in \mathbb{Z}$$

(Insgeheim: $ad = cb$ ist „dasselbe“ wie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.)
Nun müssen wir überprüfen, ob dies wirklich eine Äquivalenzrelation ist.

Rationale Zahlen

Wie können wir formal beschreiben, dass $\frac{1}{2}$ dieselbe rationale Zahl darstellt wie $\frac{2}{4}$? Wir nehmen an, dass wir bisher nur die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ kennen.
Wir nehmen die Menge $X = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ (Paare von ganzen Zahlen) und die Relation

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ genau dann wenn } ad = cb \in \mathbb{Z}$$

(Insgeheim: $ad = cb$ ist „dasselbe“ wie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.)
Nun müssen wir überprüfen, ob dies wirklich eine Äquivalenzrelation ist.

Rationale Zahlen

Wie können wir formal beschreiben, dass $\frac{1}{2}$ dieselbe rationale Zahl darstellt wie $\frac{2}{4}$? Wir nehmen an, dass wir bisher nur die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ kennen.
Wir nehmen die Menge $X = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ (Paare von ganzen Zahlen) und die Relation

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ genau dann wenn } ad = cb \in \mathbb{Z}$$

(Insgeheim: $ad = cb$ ist „dasselbe" wie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.)
Nun müssen wir überprüfen, ob dies wirklich eine Äquivalenzrelation ist.

Rationale Zahlen

$(a, b) \sim (c, d)$ genau dann wenn $ad = cb \in \mathbb{Z}$

- Reflexivität: $(a, b) \sim (a, b)$ weil $ab = ab$;
- Symmetrie: Wenn $(a, b) \sim (c, d)$ dann $(c, d) \sim (a, b)$ weil wenn $ad = cb$ dann $cb = ad$;
- Transitivität: Wenn $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f)$ dann $(a, b) \sim (e, f)$ weil wenn $ad = cb$ und $cf = ed$ dann auch $adf = cbf$ und $bcf = bed$, und dann auch $adf = bed$, also $af = be$ (weil $d \neq 0$).

Rationale Zahlen

$(a, b) \sim (c, d)$ genau dann wenn $ad = cb \in \mathbb{Z}$

- Reflexivität: $(a, b) \sim (a, b)$ weil $ab = ab$;
- Symmetrie: Wenn $(a, b) \sim (c, d)$ dann $(c, d) \sim (a, b)$ weil wenn $ad = cb$ dann $cb = ad$;
- Transitivität: Wenn $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f)$ dann $(a, b) \sim (e, f)$ weil wenn $ad = cb$ und $cf = ed$ dann auch $adf = cbf$ und $bcf = bed$, und dann auch $adf = bed$, also $af = be$ (weil $d \neq 0$).

Rationale Zahlen

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ genau dann wenn } ad = cb \in \mathbb{Z}$$

- Reflexivität: $(a, b) \sim (a, b)$ weil $ab = ab$;
- Symmetrie: Wenn $(a, b) \sim (c, d)$ dann $(c, d) \sim (a, b)$ weil wenn $ad = cb$ dann $cb = ad$;
- Transitivität: Wenn $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f)$ dann $(a, b) \sim (e, f)$ weil wenn $ad = cb$ und $cf = ed$ dann auch $adf = cbf$ und $bcf = bed$, und dann auch $adf = bed$, also $af = be$ (weil $d \neq 0$).

Rationale Zahlen

$(a, b) \sim (c, d)$ genau dann wenn $ad = cb \in \mathbb{Z}$

- Reflexivität: $(a, b) \sim (a, b)$ weil $ab = ab$;
- Symmetrie: Wenn $(a, b) \sim (c, d)$ dann $(c, d) \sim (a, b)$ weil wenn $ad = cb$ dann $cb = ad$;
- Transitivität: Wenn $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f)$ dann $(a, b) \sim (e, f)$ weil wenn $ad = cb$ und $cf = ed$ dann auch $adf = cbf$ und $bcf = bed$, und dann auch $adf = bed$, also $af = be$ (weil $d \neq 0$).

Rationale Zahlen

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ genau dann wenn } ad = cb \in \mathbb{Z}$$

- Reflexivität: $(a, b) \sim (a, b)$ weil $ab = ab$;
- Symmetrie: Wenn $(a, b) \sim (c, d)$ dann $(c, d) \sim (a, b)$ weil wenn $ad = cb$ dann $cb = ad$;
- Transitivität: Wenn $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f)$ dann $(a, b) \sim (e, f)$ weil wenn $ad = cb$ und $cf = ed$ dann auch $adf = cbf$ und $bcf = bed$, und dann auch $adf = bed$, also $af = be$ (weil $d \neq 0$).

Rationale Zahlen

$(a, b) \sim (c, d)$ genau dann wenn $ad = cb \in \mathbb{Z}$

- Reflexivität: $(a, b) \sim (a, b)$ weil $ab = ab$;
- Symmetrie: Wenn $(a, b) \sim (c, d)$ dann $(c, d) \sim (a, b)$ weil wenn $ad = cb$ dann $cb = ad$;
- Transitivität: Wenn $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f)$ dann $(a, b) \sim (e, f)$ weil wenn $ad = cb$ und $cf = ed$ dann auch $adf = cbf$ und $bcf = bed$, und dann auch $adf = bed$, also $af = be$ (weil $d \neq 0$).

Rationale Zahlen

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ genau dann wenn } ad = cb \in \mathbb{Z}$$

- Reflexivität: $(a, b) \sim (a, b)$ weil $ab = ab$;
- Symmetrie: Wenn $(a, b) \sim (c, d)$ dann $(c, d) \sim (a, b)$ weil wenn $ad = cb$ dann $cb = ad$;
- Transitivität: Wenn $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f)$ dann $(a, b) \sim (e, f)$ weil wenn $ad = cb$ und $cf = ed$ dann auch $adf = cbf$ und $bcf = bed$, und dann auch $adf = bed$, also $af = be$ (weil $d \neq 0$).

Restklassen

Äquivalenzrelation $\sim$ auf X

Definition

Die Restklasse eines Elementes $x \in X$ ist

$$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}.$$

Beispiele:

- Rationale Zahlen: $[(a, b)] = \frac{a}{b} = \{(n, m) \mid n, m \in Z, am = nb\}$
- Geburtstage: $[] =$ Oktober

Restklassen

Äquivalenzrelation $\sim$ auf X

Definition

Die Restklasse eines Elementes $x \in X$ ist

$$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}.$$

Beispiele:

- Rationale Zahlen:
  $[(a, b)] = \frac{a}{b} = \{(n, m) \mid n, m \in Z, am = nb\}$
- Geburtstage: $[] =$ Oktober

Restklassen

Äquivalenzrelation $\sim$ auf X

Definition

Die Restklasse eines Elementes $x \in X$ ist

$$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}.$$

Beispiele:

- Rationale Zahlen:
  $[(a, b)] = \frac{a}{b} = \{(n, m) \mid n, m \in Z, am = nb\}$
- Geburtstage: [Julia Goedecke] = Oktober

Restklassen

Äquivalenzrelation $\sim$ auf X

Definition

Die Restklasse eines Elementes $x \in X$ ist

$$[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}.$$

Beispiele:

- Rationale Zahlen:
  $[(a, b)] = \frac{a}{b} = \{(n, m) \mid n, m \in Z, am = nb\}$
- Geburtstage: [Stefan Ketter] = Oktober

Resultate

Lemma

Zwei Restklassen $[x]$ und $[y]$ sind entweder gleich oder überschneiden sich nicht.

Beweis.

Wir haben $x \in [x]$ wegen Reflexivität. Wenn es ein z gibt mit $z \in [x]$ und $z \in [y]$, dann $z \sim x$ und $z \sim y$. Symmetrie gibt uns $x \sim z$ und Transitivität gibt $x \sim y$. Dann gilt für jedes $w \in [x]$: $w \sim x$, und wegen $x \sim y$ und Transitivität haben wir $w \sim y$, also $w \in [y]$. Dasselbe geht natürlich auch, wenn man die Rollen von x und y vertauscht, also $[x] = [y]$. □

Resultate

Lemma

Zwei Restklassen $[x]$ *und* $[y]$ *sind entweder gleich oder überschneiden sich nicht.*

Beweis.

Wir haben $x \in [x]$ wegen Reflexivität. Wenn es ein z gibt mit $z \in [x]$ und $z \in [y]$, dann $z \sim x$ und $z \sim y$. Symmetrie gibt uns $x \sim z$ und Transitivität gibt $x \sim y$. Dann gilt für jedes $w \in [x]$: $w \sim x$, und wegen $x \sim y$ und Transitivität haben wir $w \sim y$, also $w \in [y]$. Dasselbe geht natürlich auch, wenn man die Rollen von x und y vertauscht, also $[x] = [y]$. □

Resultate

Lemma

Zwei Restklassen $[x]$ *und* $[y]$ *sind entweder gleich oder überschneiden sich nicht.*

Beweis.

Wir haben $x \in [x]$ wegen Reflexivität. Wenn es ein z gibt mit $z \in [x]$ und $z \in [y]$, dann $z \sim x$ und $z \sim y$. Symmetrie gibt uns $x \sim z$ und Transitivität gibt $x \sim y$. Dann gilt für jedes $w \in [x]$: $w \sim x$, und wegen $x \sim y$ und Transitivität haben wir $w \sim y$, also $w \in [y]$. Dasselbe geht natürlich auch, wenn man die Rollen von x und y vertauscht, also $[x] = [y]$. $\square$

Resultate

Lemma

Zwei Restklassen $[x]$ *und* $[y]$ *sind entweder gleich oder überschneiden sich nicht.*

Beweis.

Wir haben $x \in [x]$ wegen Reflexivität. Wenn es ein z gibt mit $z \in [x]$ und $z \in [y]$, dann $z \sim x$ und $z \sim y$. Symmetrie gibt uns $x \sim z$ und Transitivität gibt $x \sim y$. Dann gilt für jedes $w \in [x]$: $w \sim x$, und wegen $x \sim y$ und Transitivität haben wir $w \sim y$, also $w \in [y]$. Dasselbe geht natürlich auch, wenn man die Rollen von x und y vertauscht, also $[x] = [y]$. □

Resultate

Lemma

Zwei Restklassen $[x]$ *und* $[y]$ *sind entweder gleich oder überschneiden sich nicht.*

Beweis.

Wir haben $x \in [x]$ wegen Reflexivität. Wenn es ein z gibt mit $z \in [x]$ und $z \in [y]$, dann $z \sim x$ und $z \sim y$. Symmetrie gibt uns $x \sim z$ und Transitivität gibt $x \sim y$. Dann gilt für jedes $w \in [x]$: $w \sim x$, und wegen $x \sim y$ und Transitivität haben wir $w \sim y$, also $w \in [y]$. Dasselbe geht natürlich auch, wenn man die Rollen von x und y vertauscht, also $[x] = [y]$. □

Ordnungsrelationen

Wenn wir Symmetrie mit Antisymmetrie vertauschen, bekommen wir eine Ordnungsrelation so wie $\leq$:

- Reflexivität: $x \leq x$ für alle $x \in X$;
- Antisymmetrie: Wenn $x \leq y$ und $y \leq x$ dann $x = y$ für alle $x, y \in X$;
- Transitivität: Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$ dann $x \leq z$ für alle $x, y, z \in X$.

Ordnungsrelationen

Wenn wir Symmetrie mit Antisymmetrie vertauschen, bekommen wir eine Ordnungsrelation so wie $\leq$:

- Reflexivität: $x \leq x$ für alle $x \in X$;
- Antisymmetrie: Wenn $x \leq y$ und $y \leq x$ dann $x = y$ für alle $x, y \in X$;
- Transitivität: Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$ dann $x \leq z$ für alle $x, y, z \in X$.

Ordnungsrelationen

Wenn wir Symmetrie mit Antisymmetrie vertauschen, bekommen wir eine Ordnungsrelation so wie $\leq$:

- Reflexivität: $x \leq x$ für alle $x \in X$;
- Antisymmetrie: Wenn $x \leq y$ und $y \leq x$ dann $x = y$ für alle $x, y \in X$;
- Transitivität: Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$ dann $x \leq z$ für alle $x, y, z \in X$.

Ordnungsrelationen

Wenn wir Symmetrie mit Antisymmetrie vertauschen, bekommen wir eine Ordnungsrelation so wie $\leq$:

- Reflexivität: $x \leq x$ für alle $x \in X$;
- Antisymmetrie: Wenn $x \leq y$ und $y \leq x$ dann $x = y$ für alle $x, y \in X$;
- Transitivität: Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$ dann $x \leq z$ für alle $x, y, z \in X$.

Ablauf

Textaufgaben

Aufgabe

Louise bekommt eine Packung Gummibärchen. Sie freut sich sehr und isst gleich 5 auf. Dann kommt ihre Schwester und möchte auch etwas abhaben. Also teilt Louise die übrigen Gummibärchen gerecht zwischen sich und ihrer Schwester auf. Beide erhalten 15 Gummibärchen. Wie viele Gummibärchen waren am Anfang in der Tüte?

Mathematische Formulierung

$\frac{1}{2}(x - 5) = 15$

Textaufgaben

Aufgabe

Louise bekommt eine Packung Gummibärchen. Sie freut sich sehr und isst gleich 5 auf. Dann kommt ihre Schwester und möchte auch etwas abhaben. Also teilt Louise die übrigen Gummibärchen gerecht zwischen sich und ihrer Schwester auf. Beide erhalten 15 Gummibärchen. Wie viele Gummibärchen waren am Anfang in der Tüte?

Mathematische Formulierung

$\frac{1}{2}(x-5)=15$

Verschiedene Arten von Abstraktion

- Bisher: Abstraktion als Generalisierung
- Jetzt: Abstraktion als Modellierung

Mathematische Modellierung wird benutzt in

- Physik
- Ingenieurwesen
- Banken
- fast überall!

Verschiedene Arten von Abstraktion

- Bisher: Abstraktion als Generalisierung
- Jetzt: Abstraktion als Modellierung

Mathematische Modellierung wird benutzt in

- Physik
- Ingenieurwesen
- Banken
- fast überall!

Verschiedene Arten von Abstraktion

- Bisher: Abstraktion als Generalisierung
- Jetzt: Abstraktion als Modellierung

Mathematische Modellierung wird benutzt in

- Physik
- Ingenieurwesen
- Banken
- fast überall!

Verschiedene Arten von Abstraktion

- Bisher: Abstraktion als Generalisierung
- Jetzt: Abstraktion als Modellierung

Mathematische Modellierung wird benutzt in

- Physik
- Ingenieurwesen
- Banken
- fast überall!

Verschiedene Arten von Abstraktion

- Bisher: Abstraktion als Generalisierung
- Jetzt: Abstraktion als Modellierung

Mathematische Modellierung wird benutzt in

- Physik
- Ingenieurwesen
- Banken
- fast überall!

Verschiedene Arten von Abstraktion

- Bisher: Abstraktion als Generalisierung
- Jetzt: Abstraktion als Modellierung

Mathematische Modellierung wird benutzt in

- Physik
- Ingenieurwesen
- Banken
- fast überall!

Personalausweis für Schildkröten

- Ziel: Gefährdete Tierarten schützen.
- Wie? Internationalen Handel von gefährdeten wildlebenden Tierarten überwachen und beschränken.
- Problem: Wilde und gezüchtete Tiere müssen unterschieden werden können.
- Lösung: oft Transponder.
- Problem: riskante Eingriffe: manchmal lebensgefährlich.
- Gesucht: nichtinvasive Methode.

Kann der Panzer einer Schildkröte als „Personalausweis“ dienen?

Personalausweis für Schildkröten

- Ziel: Gefährdete Tierarten schützen.
- Wie? Internationalen Handel von gefährdeten wildlebenden Tierarten überwachen und beschränken.
- Problem: Wilde und gezüchtete Tiere müssen unterschieden werden können.
- Lösung: oft Transponder.
- Problem: riskante Eingriffe: manchmal lebensgefährlich.
- Gesucht: nichtinvasive Methode.

Kann der Panzer einer Schildkröte als „Personalausweis“ dienen?

Personalausweis für Schildkröten

- Ziel: Gefährdete Tierarten schützen.
- Wie? Internationalen Handel von gefährdeten wildlebenden Tierarten überwachen und beschränken.
- Problem: Wilde und gezüchtete Tiere müssen unterschieden werden können.
- Lösung: oft Transponder.
- Problem: riskante Eingriffe: manchmal lebensgefährlich.
- Gesucht: nichtinvasive Methode.

Kann der Panzer einer Schildkröte
als „Personalausweis“ dienen?

Personalausweis für Schildkröten

- Ziel: Gefährdete Tierarten schützen.
- Wie? Internationalen Handel von gefährdeten wildlebenden Tierarten überwachen und beschränken.
- Problem: Wilde und gezüchtete Tiere müssen unterschieden werden können.
- Lösung: oft Transponder.
- Problem: riskante Eingriffe: manchmal lebensgefährlich.
- Gesucht: nichtinvasive Methode.

Kann der Panzer einer Schildkröte als „Personalausweis“ dienen?

Personalausweis für Schildkröten

- Ziel: Gefährdete Tierarten schützen.
- Wie? Internationalen Handel von gefährdeten wildlebenden Tierarten überwachen und beschränken.
- Problem: Wilde und gezüchtete Tiere müssen unterschieden werden können.
- Lösung: oft Transponder.
- Problem: riskante Eingriffe: manchmal lebensgefährlich.
- Gesucht: nichtinvasive Methode.

Kann der Panzer einer Schildkröte
als „Personalausweis“ dienen?

Personalausweis für Schildkröten

- Ziel: Gefährdete Tierarten schützen.
- Wie? Internationalen Handel von gefährdeten wildlebenden Tierarten überwachen und beschränken.
- Problem: Wilde und gezüchtete Tiere müssen unterschieden werden können.
- Lösung: oft Transponder.
- Problem: riskante Eingriffe: manchmal lebensgefährlich.
- Gesucht: nichtinvasive Methode.

Kann der Panzer einer Schildkröte als „Personalausweis“ dienen?

Personalausweis für Schildkröten

- Ziel: Gefährdete Tierarten schützen.
- Wie? Internationalen Handel von gefährdeten wildlebenden Tierarten überwachen und beschränken.
- Problem: Wilde und gezüchtete Tiere müssen unterschieden werden können.
- Lösung: oft Transponder.
- Problem: riskante Eingriffe: manchmal lebensgefährlich.
- Gesucht: nichtinvasive Methode.

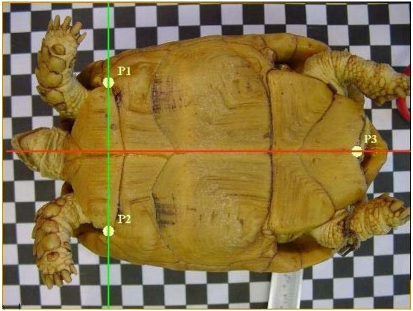
Kann der Panzer einer Schildkröte
als „Personalausweis" dienen?

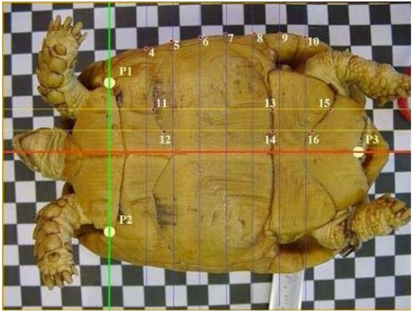
Testudo kleinmanni

Rücken- und Bauchpanzer der ägyptischen Landschildkröte:

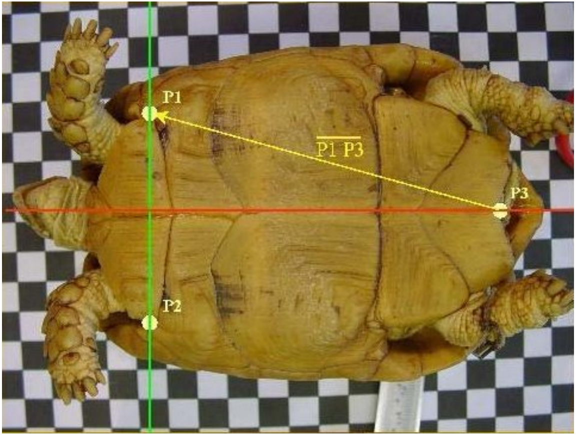
Abstraktion des Problems

Idee: Eine von Farben und Größe der Schildkröte unabhängige Methode, die Identität zu bestimmen.





Abstraktion des Problems



Lösung

- Datenbank von gezüchteten Tieren wird angelegt.
- Zollbeamter fotographiert Bauchpanzer.
- Mit Hilfe eines Computerprogramms werden drei bestimmte Punkte angeklickt.
- Das Computerprogramm berechnet nicht absolute Längen, sondern Längenverhältnisse.
- Das Computerprogramm vergleicht die Summe der berechneten Werte mit denen aus dem Personalausweis.
- Gibt es eine zu große Abweichung (Toleranzbereich wird festgelegt), ist es nicht dieselbe Schildkröte.

Lösung

- Datenbank von gezüchteten Tieren wird angelegt.
- Zollbeamter fotographiert Bauchpanzer.
- Mit Hilfe eines Computerprogramms werden drei bestimmte Punkte angeklickt.
- Das Computerprogramm berechnet nicht absolute Längen, sondern Längenverhältnisse.
- Das Computerprogramm vergleicht die Summe der berechneten Werte mit denen aus dem Personalausweis.
- Gibt es eine zu große Abweichung (Toleranzbereich wird festgelegt), ist es nicht dieselbe Schildkröte.

Lösung

- Datenbank von gezüchteten Tieren wird angelegt.
- Zollbeamter fotographiert Bauchpanzer.
- Mit Hilfe eines Computerprogramms werden drei bestimmte Punkte angeklickt.
- Das Computerprogramm berechnet nicht absolute Längen, sondern Längenverhältnisse.
- Das Computerprogramm vergleicht die Summe der berechneten Werte mit denen aus dem Personalausweis.
- Gibt es eine zu große Abweichung (Toleranzbereich wird festgelegt), ist es nicht dieselbe Schildkröte.

Lösung

- Datenbank von gezüchteten Tieren wird angelegt.
- Zollbeamter fotographiert Bauchpanzer.
- Mit Hilfe eines Computerprogramms werden drei bestimmte Punkte angeklickt.
- Das Computerprogramm berechnet nicht absolute Längen, sondern Längenverhältnisse.
- Das Computerprogramm vergleicht die Summe der berechneten Werte mit denen aus dem Personalausweis.
- Gibt es eine zu große Abweichung (Toleranzbereich wird festgelegt), ist es nicht dieselbe Schildkröte.

Lösung

- Datenbank von gezüchteten Tieren wird angelegt.
- Zollbeamter fotographiert Bauchpanzer.
- Mit Hilfe eines Computerprogramms werden drei bestimmte Punkte angeklickt.
- Das Computerprogramm berechnet nicht absolute Längen, sondern Längenverhältnisse.
- Das Computerprogramm vergleicht die Summe der berechneten Werte mit denen aus dem Personalausweis.
- Gibt es eine zu große Abweichung (Toleranzbereich wird festgelegt), ist es nicht dieselbe Schildkröte.

Lösung

- Datenbank von gezüchteten Tieren wird angelegt.
- Zollbeamter fotographiert Bauchpanzer.
- Mit Hilfe eines Computerprogramms werden drei bestimmte Punkte angeklickt.
- Das Computerprogramm berechnet nicht absolute Längen, sondern Längenverhältnisse.
- Das Computerprogramm vergleicht die Summe der berechneten Werte mit denen aus dem Personalausweis.
- Gibt es eine zu große Abweichung (Toleranzbereich wird festgelegt), ist es nicht dieselbe Schildkröte.

Ausblick: Was mache ich?

Mein Bereich der Kategorientheorie beschäftigt sich hauptsächlich mit

- Abstraktion im Sinne von Generalisierung;
- Abbildungen und globalen Strukturen;
- Fragen wie „*Warum* ist etwas so, wie es ist?"
- „Welche Details sind wichtig, welche nicht?"

Ausblick: Was mache ich?

Mein Bereich der Kategorientheorie beschäftigt sich hauptsächlich mit

- Abstraktion im Sinne von Generalisierung;
- Abbildungen und globalen Strukturen;
- Fragen wie „*Warum* ist etwas so, wie es ist?“
- „Welche Details sind wichtig, welche nicht?“

Ausblick: Was mache ich?

Mein Bereich der Kategorientheorie beschäftigt sich hauptsächlich mit

- Abstraktion im Sinne von Generalisierung;
- Abbildungen und globalen Strukturen;
- Fragen wie „*Warum* ist etwas so, wie es ist?"
- „Welche Details sind wichtig, welche nicht?"

Ausblick: Was mache ich?

Mein Bereich der Kategorientheorie beschäftigt sich hauptsächlich mit

- Abstraktion im Sinne von Generalisierung;
- Abbildungen und globalen Strukturen;
- Fragen wie „*Warum* ist etwas so, wie es ist?“
- „Welche Details sind wichtig, welche nicht?“

Ausblick: Was mache ich?

Mein Bereich der Kategorientheorie beschäftigt sich hauptsächlich mit

- Abstraktion im Sinne von Generalisierung;
- Abbildungen und globalen Strukturen;
- Fragen wie „*Warum* ist etwas so, wie es ist?“
- „Welche Details sind wichtig, welche nicht?“

Zusammenfassung

Abstraktion ist

- Generalisierung oder Modellierung.

Abstraktion kann

- Arbeit erleichtern,
- Gedanken strukturieren,
- Zusammenhänge klarmachen,
- neue Gebiete eröffnen,
- Probleme lösen,
- neue Ideen geben.

Zusammenfassung

Abstraktion ist

- Generalisierung oder Modellierung.

Abstraktion kann

- Arbeit erleichtern,
- Gedanken strukturieren,
- Zusammenhänge klarmachen,
- neue Gebiete eröffnen,
- Probleme lösen,
- neue Ideen geben.

Zusammenfassung

Abstraktion ist

- Generalisierung oder Modellierung.

Abstraktion kann

- Arbeit erleichtern,
- Gedanken strukturieren,
- Zusammenhänge klarmachen,
- neue Gebiete eröffnen,
- Probleme lösen,
- neue Ideen geben.

Zusammenfassung

Abstraktion ist

- Generalisierung oder Modellierung.

Abstraktion kann

- Arbeit erleichtern,
- Gedanken strukturieren,
- Zusammenhänge klarmachen,
- neue Gebiete eröffnen,
- Probleme lösen,
- neue Ideen geben.

Zusammenfassung

Abstraktion ist

- Generalisierung oder Modellierung.

Abstraktion kann

- Arbeit erleichtern,
- Gedanken strukturieren,
- Zusammenhänge klarmachen,
- neue Gebiete eröffnen,
- Probleme lösen,
- neue Ideen geben.

Zusammenfassung

Abstraktion ist

- Generalisierung oder Modellierung.

Abstraktion kann

- Arbeit erleichtern,
- Gedanken strukturieren,
- Zusammenhänge klarmachen,
- neue Gebiete eröffnen,
- Probleme lösen,
- neue Ideen geben.

Zusammenfassung

Abstraktion ist

- Generalisierung oder Modellierung.

Abstraktion kann

- Arbeit erleichtern,
- Gedanken strukturieren,
- Zusammenhänge klarmachen,
- neue Gebiete eröffnen,
- Probleme lösen,
- neue Ideen geben.

Zusammenfassung

Abstraktion ist

- Generalisierung oder Modellierung.

Abstraktion kann

- Arbeit erleichtern,
- Gedanken strukturieren,
- Zusammenhänge klarmachen,
- neue Gebiete eröffnen,
- Probleme lösen,
- neue Ideen geben.

Zusammenfassung

Abstraktion ist

- Generalisierung oder Modellierung.

Abstraktion kann

- Arbeit erleichtern,
- Gedanken strukturieren,
- Zusammenhänge klarmachen,
- neue Gebiete eröffnen,
- Probleme lösen,
- neue Ideen geben.

Abstraktion macht Spaß!

Danke für's Zuhören!